ДИСПЕРСИЯ ВОЛНЫ СТОУНЛИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СКВАЖИНЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

[1]Мирзоева Г.Т., [2]Иброхимов А.И., [3]Исматова К.О., [4]Тохирова Н.Т., [5]Икромов С.Н.

[1] Бухарский государственный технический университет, ассистент кафедры точных наук, gmirzoyeva@bstu.uz , https://orcid.org/0009-0007-7663-9301

[2] Специализированная общеобразовательная школа №19 г. Бухары, учитель математики, azizibrohimov554@gmail.com

[3] Бухарский государственный университет, специалист по направлению «Прикладная математика (по отраслям)», магистр, kamolaismatova2628@gmail.com

[4] Общеобразовательная школа №14 Бухарского района, учитель, tohirovanigina2@gmail.com

[5] Навоийский государственный горно-технологический университет, ассистент, sunnatilloikromov646@gmail.com , https://orcid.org/0009-0001-8000-9560

Ключевые слова: *волна Стоунли, взаимодействие жидкости и твёрдого тела, скважина, явление гидравлического удара (water-hammer), дисперсия, фазовая и групповая скорость*

Введение

Распространение упругих волн в цилиндрических скважинах, заполненных жидкостью, имеет важное значение во многих прикладных областях — акустическом каротаже в нефтегазовой геофизике, явлении гидравлического удара в гидротехнических трубопроводах, а также в биомеханике при изучении пульсовых волн в кровеносных сосудах. В результате взаимодействия между жидкостью, заполняющей скважину, и окружающей её упругой средой возникает особая ветвь волны: она не является простой суммой волн, существующих независимо в каждой из сред, а порождается исключительно их взаимодействием. М. Био [1] назвал эту волну волной Стоунли ввиду её аналогии с волной, распространяющейся на границе раздела двух полупространств [2].

В настоящих тезисах на основе классической модели М. Био [1] независимо, численным методом (Python, SciPy), решается дисперсионное уравнение волны Стоунли в цилиндрической скважине, заполненной жидкостью; анализируются её фазовая и групповая скорости, а результаты сопоставляются с аналитической асимптотической формулой в пределе длинных волн.

Цель исследования

Численно решить дисперсионное уравнение волны Стоунли в системе «жидкость – твёрдое тело»; определить зависимость её фазовой и групповой скорости от отношения длины волны к диаметру скважины λ/D и от отношения плотностей жидкости и твёрдого тела ρ/ρ1; проверить асимптотическую скорость в пределе длинных волн (формула гидравлического удара) и сопоставить численное решение с аналитическим.

Математическая модель и метод решения

Соотношения между напряжениями и смещениями со стороны твёрдого тела совпадают с соответствующими соотношениями для случая пустой скважины (граничные условия (2.12)–(2.13) [1] остаются неизменными) и выражаются следующей функцией:

$$L(\zeta_1,\zeta_2;la)\equiv 4\sqrt{1-\zeta_1^2}\left[\frac{1}{ka}+\frac{K_0(ka)}{K_1(ka)}\right]-\frac{2(2-\zeta_1^2)\sqrt{1-\zeta_2^2}}{ma}-\frac{(2-\zeta_1^2)^2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}}\frac{K_0(ma)}{K_1(ma)}$$

Потенциал смещений жидкости φ (c — скорость звука в жидкости) удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (8)$$

В случае ζ = v/c < 1 (длинноволновая ветвь Стоунли) решение выражается через модифицированную функцию Бесселя I0:

$$\phi=I_0\left[rl(1-\zeta^2)^{1/2}\right]e^{i(lz-\omega t)}, \qquad \zeta<1 \ \text{(волна Стоунли)} \quad (9)$$

(Случай ζ > 1 — отражённые конические волны — рассматривается в отдельных тезисах.) На поверхности скважины (r = a) нормальное напряжение твёрдого тела приравнивается давлению жидкости:

$$-\frac{p}{R'}=\frac{\sigma_r}{R} \qquad (r=a)$$

где R' — радиальное смещение жидкости. Применение этого условия приводит к следующему трансцендентному дисперсионному уравнению:

$$L(\zeta_1,\zeta_2;la)=\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\zeta_1^4}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{I_0\left[la\sqrt{1-\zeta^2}\right]}{I_1\left[la\sqrt{1-\zeta^2}\right]}, \qquad \zeta=\frac{v}{c}<1 \quad (10)$$

где

$$\zeta=\frac{v}{c}, \qquad \zeta_1=\frac{c\,\zeta}{v_s}, \qquad \zeta_2=\frac{v_s\zeta_1}{v_c}$$

В пределе длинных волн (la → 0) уравнение (10) имеет аналитическое решение, дающее следующую асимптотическую формулу:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\left[1 + \rho c^2/(\rho_1 v_s^2)\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left[1 + \rho c^2/G\right]^{1/2}} \quad (11)$$

Эта формула показывает, что асимптотическая скорость зависит от единственного безразмерного параметра — отношения сжимаемости жидкости ρc^2 к модулю сдвига твёрдого тела G. Это согласуется с результатом классической теории гидравлического удара (water-hammer).

Результаты и их анализ

Уравнение (10) было решено численно при vs/c = 1,5, v = 0,25 и четырёх значениях отношения плотностей ρ/ρ1 = 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 (использовались модифицированные функции Бесселя I0, I1 и K0, K1, а также алгоритм Брента для поиска корня). На рис. 4 представлена фазовая скорость, на рис. 5 — групповая скорость.

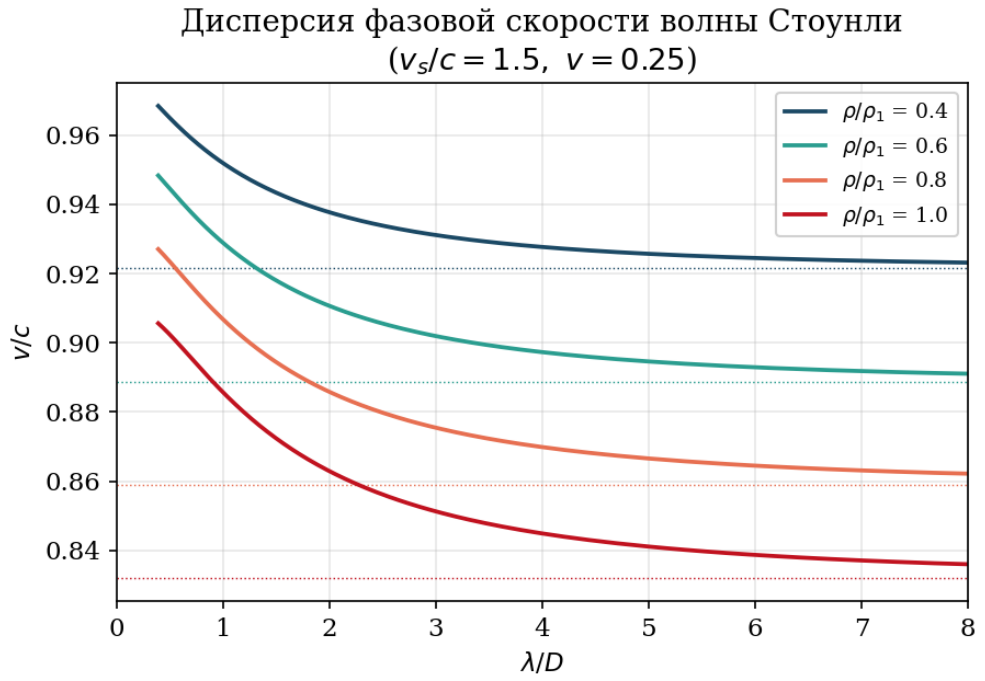


Рис. 4. Дисперсия фазовой скорости волны Стоунли (пунктирные линии — асимптотические значения, найденные по формуле (11))

Для каждого отношения плотностей численное значение, полученное в пределе la → 0 (длинная волна), было сопоставлено с аналитической формулой (11) (табл. 2). Расхождение во всех случаях не превышает $2 \cdot 10^{-5}$, что подтверждает высокую точность численного решения.

ρ/ρ1	v/c (числ., la = 0,05)	v/c (формула (11), аналит.)	Расхождение
0,4	0,92143	0,92144	$1{,}0\cdot10^{-5}$
0,6	0,88852	0,88852	$0{,}9\cdot10^{-5}$
0,8	0,85889	0,85890	$0{,}7\cdot10^{-5}$
1,0	0,83205	0,83205	$0{,}3\cdot10^{-5}$

Табл. 2. Сопоставление численного решения волны Стоунли в пределе длинных волн с аналитической асимптотической формулой (11)

Из рис. 4 видно, что фазовая скорость волны Стоунли на коротких волнах (малые λ/D) начинается со значения, близкого к скорости волны Стоунли на плоской границе раздела, и монотонно убывает с увеличением длины волны, стремясь при $\lambda/D \gtrsim 5$ к постоянному асимптотическому значению теории гидравлического удара. С увеличением отношения плотностей ρ/ρ1 (то есть при утяжелении жидкости относительно твёрдого тела) скорость уменьшается, поскольку для смещения более тяжёлой жидкости требуется больше энергии, а эффективная «жёсткость» системы снижается.

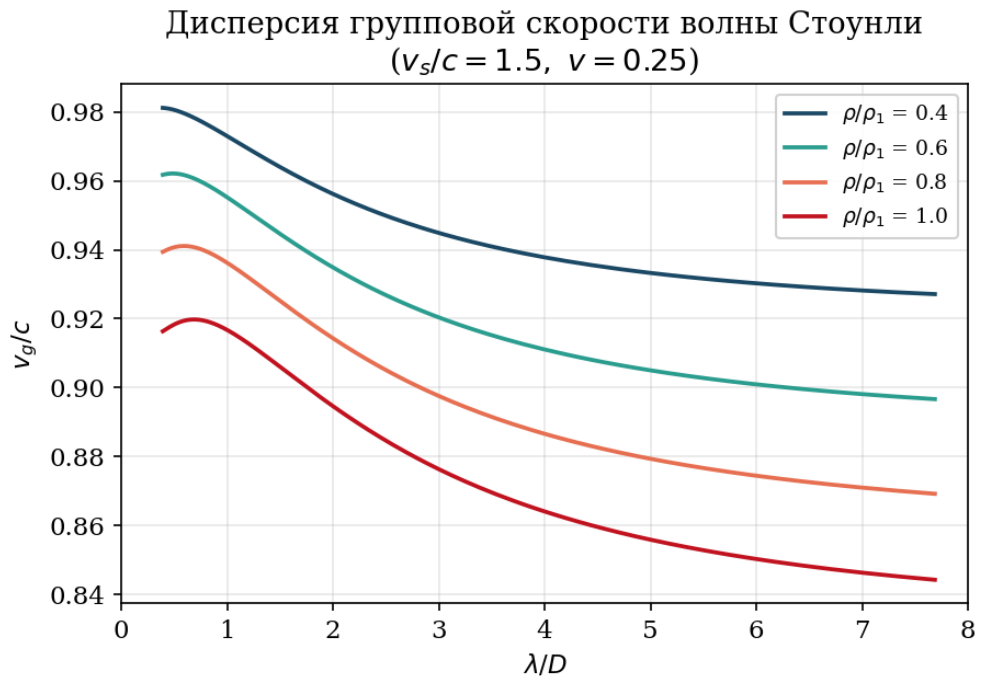


Рис. 5. Дисперсия групповой скорости волны Стоунли

На рис. 5 представлена групповая скорость; она, как и фазовая скорость, имеет в целом монотонно убывающий характер, однако при более высоких отношениях плотностей в области коротких волн наблюдается небольшой максимум. В

пределе длинных волн групповая и фазовая скорости стремятся к одному и тому же асимптотическому значению, поскольку в этом случае $d\zeta/d(la) \to 0$.

Заключение

Выполненный численный анализ независимо подтвердил классические результаты М. Био [1]: фазовая и групповая скорости волны Стоунли монотонно убывают с увеличением длины волны и с высокой точностью (расхождение менее $2 \cdot 10^{-5}$) приближаются к аналитической асимптотической формуле (11). Отсутствие частоты отсечки — важная особенность волны Стоунли, отличающая её от других (отражённых) ветвей: именно поэтому она способна распространяться на большие расстояния без затухания, что объясняет её практическое применение в качестве акустического сигнала в скважинах (tube wave / волновой каротаж Стоунли). Полученные результаты могут быть обобщены в диссертационном исследовании автора, посвящённом распространению волн в вязкоупругих цилиндрических оболочках, путём введения дополнительных граничных условий, учитывающих влияние жидкости.

Литература

1. Biot M. A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // Journal of Applied Physics. — 1952. — Vol. 23, No. 9. — P. 997–1005.
2. Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proceedings of the Royal Society of London, Series A. — 1924. — Vol. 106, No. 738. — P. 416–428.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 248 с.